

Chapter 1

數系與符號

第一節 自然數與整數

第二節 有理數

第三節 根數

第四節 數學符號

第一節

自然數與整數

由牙牙學語開始，我們使用 $1, 2, 3, 4, \dots$ ，這些數字稱為自然數(natural numbers)，其個數為無限多個，沒有上限，我們將這些數字集合在一起，記為自然數系，制定其符號為 N 。如同一個班級的學生在同一間教室般，給予某種數學上的符號（大括弧），稱為集合(set)，所以， $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 是為自然數系。

1 是自然數系中的一員，故稱 1 為 N 中的元素之一，記為 $1 \in N$ ，同理， $2 \in N, 3 \in N, \dots$ 。在 N 中加法、乘法的計算都沒問題，但是在世界上只有自然數的時代，減法、除法卻有許多不可行之處，如 $1-2$ ， $2 \div 3$ ， $4-10$ 等。因此我們將數系放大，加入 0 及 $-1, -2, -3, \dots$ ，形成新的數系，稱為整數系，記為 Z 。所以 $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ 。

我們可以發現 N 是 Z 的一部分，如同 1 年 1 班是整個一年級的一部分，記為 $N \subset Z$ ，稱為 N 包含於 Z （或 Z 包含 N ），所以 $1 \in N$ ，則 $1 \in Z$ ，但 $-2 \in Z$ ，並不代表 $-2 \in N$ （即 $-2 \notin N$ ）。舉例來說，若小華是 1 年 1 班的學生，則他一定是一年級的學生，但小明為一年級的學生，並不代表他一定是 1 年 1 班的學生。

整數佔據世上大多數的事物，如人數、書本數量、購買飲料的杯數、訂購幾個便當、買幾張電影票、有幾支手機、家中有多少房間、櫃子裡有多少件大衣等生活大小事，這些問題的答案，都是整數（甚至為自然數），在此複習一下，在整數的世界才會出現的名詞。

1. 因數與倍數：若 a, b 為整數，且 $ab = c$ ，則稱為 c 為 a 的倍數（亦為 b 之倍數）；而 a 為 c 之因數（ b 亦為 c 之因數）。如 $6 = 2 \times 3$ ，代表 6 是 2 的倍數，同理，6 也是 3 的倍數。而 2 與 3 皆為 6 之因數，甚至 $-2, -3$ 也是 6 的因數〔因為 $6 = (-2) \times (-3)$ 〕。

2. 質數：一個大於 1 的自然數，除了 1 和本身之外沒有其他的正因數，稱為質數，如 3、7、131 等。最小的質數為 2，而質數有無限多個。目前已發現的最大質數，可以寫成「2 的 57885161 次方減 1」（即 $2^{57885161} - 1$ ），共有 17425170 位數。
3. 合數：一個大於 1 的自然數，除了 1 和本身之外，仍有其他的正因數，稱為合數。例如： $6 = 2 \times 3$ ，6 有 1, 6, 2, 3 這 4 個正因數，所以 6 是合數。
4. 質因數：若自然數 a 為整數 c 之因數，且 a 亦為質數，則稱 a 為 c 之質因數。
5. 算術基本定理：每個大於 1 的自然數，若不是質數均可寫成某些質數之乘積，且若不考慮這些質因數之順序，則此表示法是唯一的。例如： $12 = 2 \times 2 \times 3$ ， $150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$ ，亦即 $12 = 2^2 \times 3$ ， $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ ，故此算術基本定理有另一種面貌：「任何大於 1 的正整數，都可以唯一表示成 $P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \cdots \times P_n^{\alpha_n}$ ，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 為正整數， $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是質數，且 $P_1 < P_2 < \cdots < P_n$ 」，這正是「標準分解式」。
6. 除法原理：對任意的整數 a ，及自然數 b ，“ $a \div b$ ”的結果，以 $a = bq + r$ 表示，其中 $0 \leq r < b$ 。例如： $128 \div 5$ 無法寫成 $\frac{128}{5} = 25.6$ ，因為現在只有整數而已。於是將 128 除以 5，表示成 $128 = 5 \times 25 + 3$ ，又如 $-38 \div 4$ ，表示成 $-38 = 4 \times (-10) + 2$ 。
7. 奇數與偶數： a 為整數，若 $a = 2m$ ，其中 m 亦為整數，則稱 a 為偶數。若 $a = 2n + 1$ ，其中 n 為整數，且稱 a 為奇數（集合的符號能大大縮減書寫時間，如 $n \in \mathbb{Z}$ ，代表 n 為整數）。
8. 公因數：若整數 d 同時為整數 a 和 b 之因數，則稱 d 為 a 和 b 之公因數，而 a 和 b 之公因數中數字最大者，稱為最大公因數，記為 $(a, b) = d$ 。
9. 公倍數：若正整數 m 同時為整數 a 和 b 之倍數，則稱 m 為 a 和 b 之公倍數，而 a 和 b 之公倍數中數字最小者，稱為最小公倍數，記為 $[a, b] = m$ 。

10. 互質：若兩整數 a 和 b 之最大公因數為 1，即 $(a, b) = 1$ ，稱 a 與 b 互質。

11. $(a, b) \cdot [a, b] = ab$ 。

雖然整數（自然數）是很簡單的數字，但其中有相當引人入勝的思考題，畢竟現階段（九年級過後）的數學不再只是算術而已，數學應是每個人智慧的開端。



班上共有 25 位同學，恰好分坐在 5×5 的正方形座位表。每個人的鄰座為其前後左右的座位，但 4 個角落座位的鄰座只有 2 位，而最外圍的鄰座有 3 位，只有中間位子的鄰座才有 4 個。請問能否將每個人都換到他的鄰座？理由為何？

解

圖為 5×5 座位表，我們將某些座位作出記號「 $\times$ 」，形成類似梅花座的座位表，如此一來， $\times$ 和 $\square$ 互為鄰座，依題意要將所有的 $\times$ 和 $\square$ 互換，我們發現是不可能的，因為 $\square$ 為 13 個， $\times$ 為 12 個， $13 \neq 12$ ，個數不同，無法互換。

$\square$	$\times$	$\square$	$\times$	$\square$
$\times$	$\square$	$\times$	$\square$	$\times$
$\square$	$\times$	$\square$	$\times$	$\square$
$\times$	$\square$	$\times$	$\square$	$\times$
$\square$	$\times$	$\square$	$\times$	$\square$



如何利用 3 公升及 5 公升之無刻度空桶至水池旁正確量測出 1 公升之水量？

解

【作法 I】

$$1 = 3 \times 2 - 5 \times 1$$

	①	②	③	④
3 公升	3	0	3	1
5 公升	0	3	3	5

①將 3 公升空桶裝滿。

②將所有水倒往 5 公升空桶。

③再將 3 公升空桶裝滿。

④再將水倒往 5 公升桶子，由於已經有 3 公升的水量，

故只能再裝 2 公升水量，因此 3 公升桶子中會留下 $3 - 2 = 1$ 公升。

【作法 II】

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
5 公升	5	2	2	0	5	4	4	1
3 公升	0	3	0	2	2	3	0	3

請試著解釋出所有的步驟。

隨堂練習

1. 如何利用 5 公升及 7 公升之無刻度空桶，正確量測出 1 公升水量？
2. 2 公升及 6 公升之無刻度空桶，是否能正確量測出 1 公升水量？理由為何？



現有裝滿水的 8 公升桶子，以及 3 公升、5 公升的空桶，3 個桶子皆無刻度。請問如何正確量測出 1 公升的水量？



本題與例題2類似，但如今水量只有8公升，不能浪費，每個步驟中，3個桶子的水量總和都不變（8公升）。

【作法 I】

	①	②	③	④
8 公升	8	5	5	2
5 公升	0	3	0	3
3 公升	0	0	3	5

做法幾乎與有水池的情況相同。

【作法 II】

		①	②	③	④	⑤
8 公升	8	3	3	6	6	1
5 公升	0	5	2	2	0	5
3 公升	0	0	3	0	2	2

步驟比有水池的情況少，而1公升的水量是留在8公升的桶子。

----- 隨堂練習 -----

1. 如同例題 3 的情況，若給定的是 4 公升、7 公升之無刻度空桶及 1 個裝滿水的 11 公升桶子，是否能正確量測出 1 公升的水？
2. 是否能利用相同的方法，以 5 公升及 8 公升的無刻度空桶在水池旁，正確量出 2 公升的水量？若無水池，卻有裝滿水的 13 公升之無刻度桶子，又該如何量測？

上述問題都是最大公因數的應用。例如：用 4 公升及 6 公升之空桶是無法量測出 1 公升的水量，因為用 4 和 6 的倍數組合，得出的最小正整數是 2，這正是 4 和 6 的最大公因數。

兩正整數 a, b 之最大公因數 $d = (a, b)$ 的求法：

1. 短除法。缺點為當數字大時幾乎無用武之地。